XXV Olimpíada Matemática de la Cuenca del Pacífico

APMO

Marzo 2013

Duración: 4 horas — *Cada problema vale 7 puntos*

** Los problemas son confidenciales hasta su publicación en el sitio web oficial de APMO* http://www.daryn.kz/apmo.*Por favor, no publicar ni discutir los problemas en Internet hasta esa fecha.*

No se puede usar calculadora.

Problema 1. Sea *ABC* un triángulos con alturas *AD*, *BE* y *CF*, y sea *O* su circuncentro. Demostrar que los segmentos *OA*, *OF*, *OB*, *OD*, *OC OE* dividen al triángulo *ABC* en tres pares de triángulos que tienen áreas iguales.

Problema 2. Determinar todos los enteros positivos *n* para los que $\dfrac{n^2+1}{\lfloor \sqrt{n} \rfloor^2+2}$ es un entero. Aquí $\lfloor r \rfloor$ denota al mayor entero menor o igual que *r*.

Problema 3. Para los 2*k* números reales $a_1, a_2, \ldots, a_k, b_1, b_2, \ldots, b_k$ se define la sucesión de números X_n mediante

$$X_n = \sum_{i=1}^{k} \lfloor a_i n + b_i \rfloor \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

Si la sucesión X_n es una progresión aritmética, demostrar que $\sum_{i=1}^{k} a_i$ debe ser entero. Aquí $\lfloor r \rfloor$ denota al mayor entero menor o igual que *r*.

Problema 4. Sean *a* y *b* enteros positivos, y sean *A* y *B* conjuntos finitos de números enteros que satisfacen:

(i) *A* y *B* son disjuntos;

(ii) si un entero *i* pertenece a *A* o a *B*, entonces $i+a$ pertenece a *A* o $i-b$ pertenece a *B*.

Demostrar que $a|A| = b|B|$. (Aquí $|X|$ denota el número de elementos del conjunto *X*.)

Problema 5. Sea *ABCD* un cuadrilátero inscrito en una circunferencia ω, y sea *P* un punto en la prolongación de *AC* tal que *PB* y *PD* son tangentes a ω. La tangente que pasa por *C* corta a *PD* en *Q* y a la recta *AD* en *R*. Sea *E* el segundo punto de intersección entre *AQ* y ω. Demostrar que *B*, *E*, *R* son colineales.